Corrigé de la fiche d'exercices

Bilan année de 1ère – Préparation de la terminale

Exercice 1	Chapitre abordé : Suites numériques
	Compétences travaillées : Modéliser – Raisonner – Calculer – Communiquer

Une école de danse a ouvert ses portes en 2021. Cette année-là, elle comptait 800 inscrits. Chaque année, elle prévoit une augmentation de 15 % des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'inscrits l'année $2021+n$. Chaque inscrit paye une cotisation annuelle de 150 euros, sur laquelle l'école conserve un bénéfice de 20 euros après avoir payé tous ses frais fixes. L'école économise ce bénéfice afin de construire une nouvelle salle de danse. Pour cela, elle a besoin d'un budget de 125 000 euros.
Partie A : Les données sont saisies dans une feuille de calcul donnée ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Année	Rang de l'année	Nombre d'inscrits	Bénéfice annuel	Bénéfices cumulés
2	2021	0	800	16 000	16 000
3	2022	1	830	16 600	32 600
4	2023	2	865	17 300	49 900
5	2024	3	904	18 080	67 980
6	2025	4	950	19000	86 980
7	2026	5			
8	2027	6			

Le format de cellule a été choisi pour que les nombres de la colonne C soient arrondis à l'unité.

1- Quelle formule peut-on saisir en C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre d'inscrits l'année de rang n ?

La formule à saisir dans la cellule C3 est : =C2*1,15-90

2- Quelle formule peut-on saisir en E3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le bénéfice cumulé à l'année de rang n ?

La formule à saisir dans la cellule E3 est : =E2+D3

3- Compléter sur le sujet, à rendre avec la copie, les six cellules des lignes qui correspondent aux années 2026 et 2027.

	A	B	C	D	E
1	Année	Rang de l'année	Nombre d'inscrits	Bénéfice annuel	Bénéfices cumulés
2	2021	0	800	16 000	16 000
3	2022	1	830	16 600	32 600
4	2023	2	865	17 290	49 890
5	2024	3	904	18 084	67 974
6	2025	4	950	18 996	86 970
7	2026	5	**1 002**	**20 045**	**107 015**
8	2027	6	**1 063**	**21 252**	**128 267**

4- En quelle année l'école pourra-t-elle construire sa nouvelle salle de danse ?

Elle pourra construire sa nouvelle salle de danse en 2027, date à laquelle les bénéfices cumulés dépasseront les 125000 euros.

Partie B

1- Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}15u_n - 90$ et préciser u_0.

Chaque année le nombre d'inscrit augmente de 15 % ce qui revient à multiplier par 1,15 puis on retranche 90 pour les désinscriptions. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\ 1,15u_n - 90$ avec $u_0 = 800$.

2- Compléter le script du programme Python ci-dessous afin qu'il crée la liste des 10 premiers termes de la suite (u_n).

```
L=[800]
for i in range(1,10) :
    L.append(1.15*L[i-1]-90)
print (L)
```

3- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 600$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.

On a : $v_n = u_n - 600$ **pour tout entier naturel n**

Donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 600$

$v_{n+1} = 1,15u_n - 90 - 600$

$v_{n+1} = 1,15u_n - 690$

$v_{n+1} = 1,15(u_n - \frac{690}{1,15})$

$v_{n+1} = 1,15(u_n - 600)$

$v_{n+1} = 1,15v_n$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique, de raison 1,15.

De plus, $v_0 = u_0 - 600 = 800 - 600 = 200$

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

Puisque la suite (v_n) est une suite géométrique, pour tout entier naturel n, $v_n = v_o \times q^n$

Ainsi pour tout entier naturel n, $v_n = 200 \times 1,15^n$

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 \times 1{,}15^n + 600$.

Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = u_n - 600$ **donc** $u_n = v_n + 600$

Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 200 \times 1,15^n + 600$

4- Conjecturer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 200 \times 1,15^n + 600 = +\infty$**, la calculatrice permet de conjecturer que le nombre d'adhérents ne cessera pas d'augmenter et n'atteindra pas de limite finie.**

5- A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année, cette école accueillera plus de 2 000 adhérents.

Avec la calculatrice, on a : $u_{13} \approx 1\,831 < 2\,000$ **et** $u_{14} \approx 2015 > 2000$

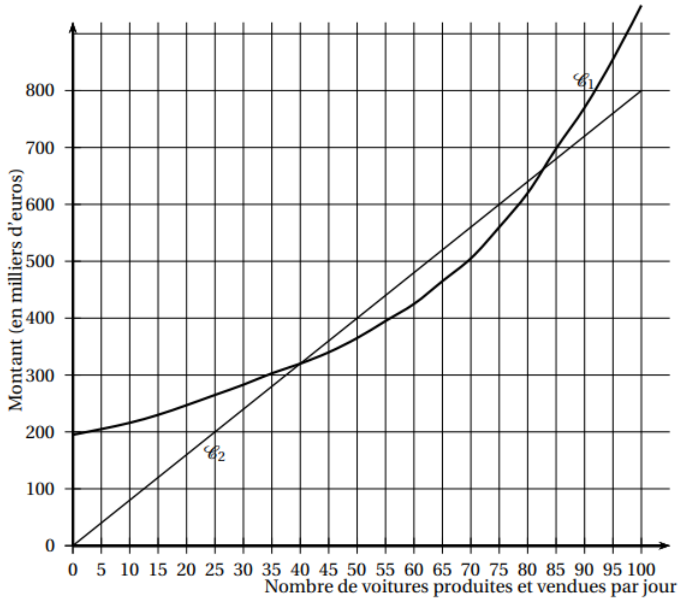
Donc c'est à partir de n = 14 c'est-à-dire en 2021+14 = 2035 que le nombre d'élèves de cette école dépassera 2 000.

Exercice 2	**Chapitres abordés : Fonction dérivée, variations de fonctions et second degré**
	Compétences travaillées : Calculer

Une usine de fabrication de voitures a une capacité de production de 100 véhicules par jour.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique ci-contre sont tracées deux courbes C1 et C2. L'une représente le coût de production en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour, l'autre le chiffre d'affaires de l'usine en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour.



1. Sachant que le chiffre d'affaires de l'usine est proportionnel au nombre de voitures produites et vendues chaque jour, laquelle des deux courbes représente ce chiffre d'affaires ?

Le chiffre d'affaires de l'usine étant proportionnel au nombre de voitures produites et vendues chaque jour, la fonction représentant ce chiffre en fonction du nombre de voitures vendues est linéaire ; sa représentation graphique est une droite : c'est donc la droite C2.

2. Avec la précision permise par le graphique, donner le coût de production de 55 voitures.

Pour 55 voitures produites le coût de production sera d'environ 400 000 €.

3. Combien de voitures faut-il produire et vendre pour réaliser un chiffre d'affaires de 600 000 euros ?

La droite d'équation $y = 600$ intersecte la courbe au point d'abscisse 75 donc il faut produire et vendre 75 voitures pour réaliser un chiffre d'affaires de 600 000 euros.

4. Pour combien de voitures produites et vendues par jour l'usine réalise-t-elle un bénéfice ? Le résultat sera donné sous forme d'un intervalle.

Il y a bénéfice pour toutes les ventes telles que pour une abscisse de x le chiffre d'affaires est supérieur au coût de production. On constate que ceci est réalisé pour $x > 40$ et $x < 83$.

Il y a donc bénéfice si $x \in [41\,;\,82]$.

Partie B : Étude d'une fonction

On appelle résultat la différence entre le chiffre d'affaires et le coût de production. S'il est positif, il correspond à un bénéfice, s'il est négatif, il correspond à une perte.

Pour un nombre entier x de voitures produites et vendues par jour, on modélise le résultat par la fonction R définie sur [0 ; 100] par $R(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}07x^2 + 3{,}36x - 186$.

1. Montrer que la fonction R est dérivable sur [0 ; 100] et déterminer sa fonction dérivée R'.

R est dérivable sur [0 ; 100] car c'est une fonction polynôme, somme et produit de fonctions dérivables. De plus on a : $\boldsymbol{R'(x) = -0,003x^2 + 0,14x + 3,36}$

2. Étudier le signe de $R'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 100].

On a $\Delta = 0,142 - 4 \times (-0,003) \times 3,36 = 0,05992$. Comme Δ > 0, R' possède deux racines :
$x_1 = \frac{-0,14-\sqrt{0,05992}}{2\times-0,003} \approx 64,13$ **et** $x_2 = \frac{-0,14+\sqrt{0,05992}}{2\times-0,003} \approx -17,46$

Puisque le domaine de définition de R est [0 ; 100], on en déduit :

x	0		$\approx 64,13$		100
$R'(x)$		$+$	0	$-$	

3. En déduire le tableau de variation de la fonction R sur [0 ; 100].

x	0		$\approx 64,13$		100
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
$R(x)$			$\approx 53,618$		
	≈ -186	↗		↘	-150

4. Selon ce modèle, combien de voitures l'usine doit-elle produire et vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

D'après le tableau précédent le résultat maximum est obtenu pour $x \approx 64,13$. Le bénéfice le plus important est obtenu en construisant 64 voitures.

Pour $x = 64$, on obtient $R(64) \approx 53,616$ donc le bénéfice sera de 53 616 €

Exercice 3	**Chapitre abordé :**
	Compétences travaillées : Représenter

Dans une ville comportant 15 000 foyers, une enquête portant sur les habitudes en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- ✓ 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif ;
- ✓ Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30 % consomment des produits bio.
- ✓ Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note les évènements suivants :

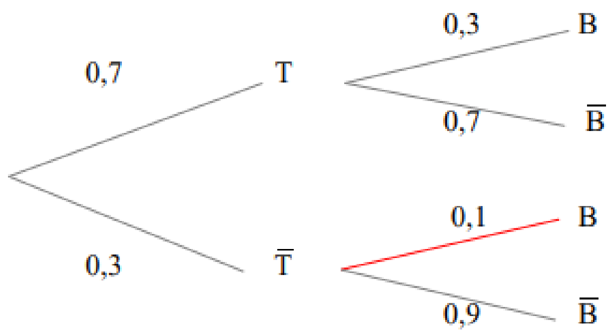
- ✓ T = « Le foyer pratique le tri sélectif » ;
- ✓ B = « Le foyer consomme des produits bio ».

1- Représenter cette situation à l'aide un arbre pondéré de probabilités.

On a, d'après l'énoncé : $P(T) = \frac{10\,500}{15\,000} = 0,7$ **donc** $P(\overline{T}) = 1 - 0,7 = 0,3$ **.**

$P_{T}(B) = 0,30$ **et** $P_{\overline{T}}(B) = \frac{450}{15\,000 - 10\,500} = 0,1.$

Ainsi :



2- Calculer $P(T \cap B)$ et contextualiser le résultat dans le problème.

$P(T \cap B) = P(T) \times P_T(B) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$

La probabilité que le foyer pratique le tri sélectif <u>et</u> consomme des produits bio est de 0,21.

3- Justifier que $P(B) = 0,24$.

$P(B) = P(T \cap B) + P(\overline{T} \cap B) = 0,21 + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(B) = 0,21 + 0,3 \times 0,1 = 0,24$ **.**

La probabilité que le foyer consomme des produits bio est de 0,24.

4- On choisit au hasard un foyer consommant des produits bio, quelle est la probabilité que ce dernier pratique le tri sélectif ?

Il s'agit ici de calculer $P_B(T)$**.**

$P_B(T) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)} = \frac{0,21}{0,24} = 0,875$ **.**

La probabilité qu'un foyer pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio est de 0,875.

5- Cette ville décide de favoriser les ménages ayant un comportement écocitoyen. Pour cela, elle offre chaque année un chèque de 50 € aux foyers pratiquant le tri sélectif et un chèque de 20 € à ceux qui consomment des produits bio. Les deux récompenses peuvent être cumulées.
On note S la variable aléatoire égale à la somme perçue par un ménage choisi au hasard.

a. Déterminer la loi de probabilité de S.

S peut prendre les valeurs : 0 ; 20 ; 50 et 70. Donc on a la loi ci-dessous :

s_i	0	20	50	70
$P(S=s_i)$	$P(\overline{T}\cap\overline{B})$ $0,3\times 0,9=0,27$	$P(\overline{T}\cap B)$ $0,3\times 0,1=0,03$	$P(T\cap\overline{B})$ $0,7\times 0,7=0,49$	$P(T\cap B)$ $0,7\times 0,3=0,21$

b. Calculer l'espérance de S et interpréter le résultat.

$$E(S)=0,27\times 0+0,03\times 20+0,49\times 50+0,21\times 70=39,80$$

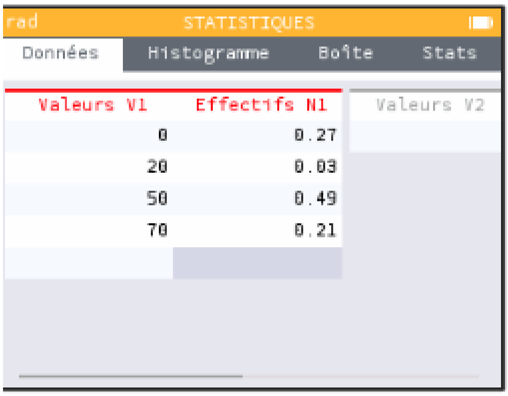
Pour un très grand nombre de foyers de cette ville, la récompense moyenne offerte par foyer est de 39,80 €.

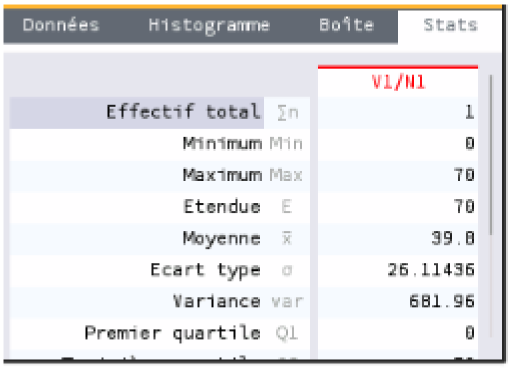
c. Calculer l'écart-type de S.

$$V(S)=0,27\times(0-39,80)^2+0,03\times(20-39,80)^2+0,49\times(50-39,80)^2+0,21\times(70-39,80)^2\approx 681,96$$

$$\sigma(S)=\sqrt{V(S)}\approx 26,11$$

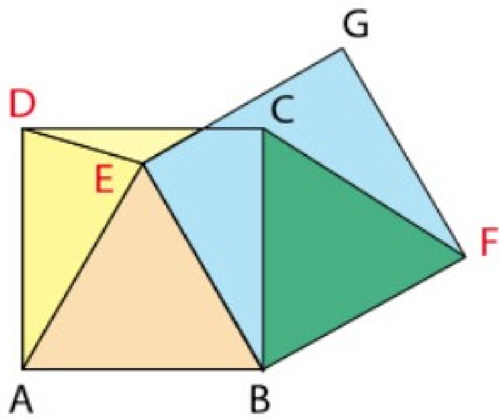
Avec la calculatrice, nous pouvons vérifier :





Exercice 4	Chapitre abordé : Produit scalaire
	Compétences travaillées : Chercher – Raisonner - Communiquer

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1, ABE est un triangle équilatéral et BFGE est un carré.



Partie 1 :

1- Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BE}} = \boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BE} \times \cos \widehat{\boldsymbol{CBE}} = \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \cos \mathbf{30}° = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

Car ABCD est un carré de côté 1 et ABE est équilatéral de côté 1 aussi.

Ainsi

$\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BE}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BE}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BE}} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

2- Calculer $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{EA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EB}} = \boldsymbol{EA} \times \boldsymbol{EB} \times \cos \mathbf{60}° = \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

3- Démontrer que le triangle BFC est équilatéral.

Tout d'abord remarquons que $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AB} = \mathbf{1}$ car ABCD est un carré

De plus $\boldsymbol{BF} = \boldsymbol{EB} = \mathbf{1}$ car EBFG est un carré et car $\boldsymbol{EB} = \boldsymbol{AB} = \mathbf{1}$.

Par ailleurs $\widehat{\boldsymbol{FBC}} = \mathbf{90} - \widehat{\boldsymbol{EBC}} = \mathbf{90} - \mathbf{30} = \mathbf{60}°$

BCF est donc un triangle isocèle possédant un angle de 60 ° il est donc équilatéral de côté 1 également.

4- En déduire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EG}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}} = \boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BF} \times \cos \widehat{\boldsymbol{CBF}} = \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \cos \mathbf{60}° = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

5- Justifier que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BE}}\right).\overrightarrow{\boldsymbol{EG}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BF}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = -\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{BF} \times \cos \widehat{\boldsymbol{ABF}} + \boldsymbol{BE} \times \boldsymbol{BF} \times \cos \widehat{\boldsymbol{FBE}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = -\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \cos \mathbf{150} + \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \cos \mathbf{90}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = -\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times (-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}) + \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{0}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}.\overrightarrow{\boldsymbol{EG}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

6- En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG})}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EG}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$. **(Calculés dans les questions précédentes)**

$\boldsymbol{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = 0}$

7- En déduire l'alignement des points D, E et F.

On a : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = 0$ donc (DE) et (BG) sont perpendiculaires.

Or (EF) et (BG) sont perpendiculaires car diagonales du carré. Donc (DE) et (EF) sont parallèles avec un point commun, E.

Elles sont donc confondues et donc D, E et F sont alignés.

Partie 2 :

Montrons l'alignement des points D, E et F en utilisant le repère orthonormé $(A\,;B\,,D)$. On cherchera dans un premier temps à déterminer les coordonnées des points A, B, C, D E et F de la figure.

Tout d'abord, dans le repère orthonormé $(A\,;B\,,D)$, on a :

$\boldsymbol{A(0\,;0)\,;\ B(1\,;0)\,;\ C(1\,;1)\,;\ D(0\,;1)}$.

E a pour abscisse E car son projeté orthogonal H sur (AB) est le milieu de [AB].

A l'aide du théorème de Pythagore, on a $EH^2 = AE^2 - AH^2$

Donc $EH = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi $E(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$.

En utilisant le même raisonnement on prouve que $F(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$.

Les coordonnées de G sont inutiles.

On a : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs :

$$\boldsymbol{det(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}) = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0}$$

Ces vecteurs sont colinéaires donc les points sont alignés.

Exercice 5	Chapitre abordé : Fonctions trigonométriques
	Compétences travaillées : Chercher – calculer

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2\cos(x) - 1$.

1- Calculer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Donner les valeurs exactes des résultats.

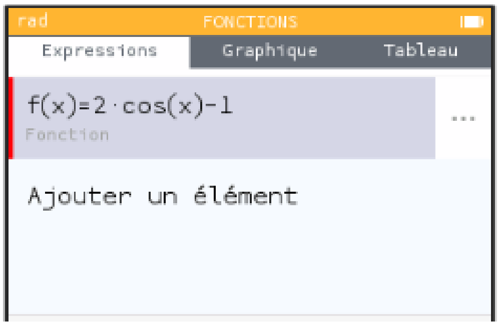
$$\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1}$$

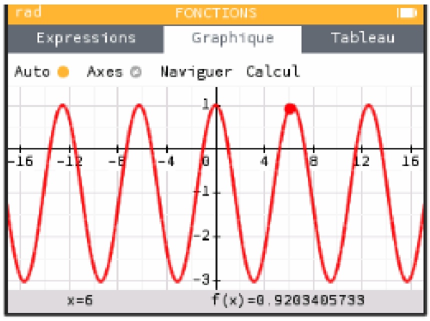
$$\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1}$$

$$\boldsymbol{f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0}$$

2- A l'aide de la calculatrice, conjecturer la périodicité et la parité de la fonction f.

En mode radian





f semble 2π-périodique et paire.

3- Démontrer que la fonction f est périodique et préciser sa période.

Pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) - 1 = 2\cos(x) - 1 = f(x)$

Donc f est périodique de période 2π.

4- Etudier la parité de la fonction f. Interpréter graphiquement le résultat.

Pour tout réel x, $f(-x) = 2\cos(-x) - 1 = 2\cos(x) - 1 = f(x)$.

f est donc paire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une étude de la fonction sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ suffit car par symétrie on retrouve le motif de la courbe sur $[-\pi\ ;\ 0]$ puis par périodicité on obtient toute la courbe sur l'ensemble des réels.

5- Démontrer que pour tout réel x, on a : $-3 \leq f(x) \leq 1$.

Pour tout réel x, on a :

$$\boldsymbol{-1 \leq \cos(x) \leq 1}$$

$$\boldsymbol{-2 \leq 2\cos(x) \leq 2}$$

$$\boldsymbol{-3 \leq 2\cos(x) - 1 \leq 1}$$

$$\boldsymbol{-3 \leq f(x) \leq 1}$$

6- Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;2\pi]$ l'équation $f(x) = -2$.

$$\boldsymbol{f(x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos(x) - 1 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = -\frac{1}{2}}$$

Cette équation a deux solutions dans l'intervalle $[0\ ;2\pi]$: $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

Exercice 6	Chapitre abordé : Géométrie plane et équations de droite
	Compétences travaillées :

Dans cet exercice, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$.

1ère partie :

1- On considère le cercle C d'équation $x^2+y^2=4$.

a. Déterminer son centre et son rayon.

$\boldsymbol{x^2+y^2=4} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(x-0)^2+(y-0)^2=2^2}$

C est donc le cercle de centre (0 ; 0) et de rayon 2.

b. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle au point d'ordonnée positive et d'abscisse 1.

Notons A le point du cercle d'abscisse 1. Ses coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2=4$.

C'est-à-dire : $1^2+y^2=4$ ou encore $y=\sqrt{3}$ car son ordonnée est positive.

Ainsi $A(1\,;\,\sqrt{3})$.

la tangente au cercle au point a pour vecteur normal $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ donc elle admet pour équation :

$$\boldsymbol{x+\sqrt{3}y+c=0}$$

Par ailleurs $(1\,;\,\sqrt{3})$ appartient à cette droite donc : $1+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+c=0$ d'où $c=-4$

Ainsi la tangente au cercle au point a pour équation cartésienne : $x+\sqrt{3}y-4=0$

2- On considère la parabole P d'équation $y=x^2-2$.

Déterminer les coordonnées de son sommet et l'équation réduite de son axe de symétrie.

Cette parabole a pour équation $y=x^2-2$. Elle est de la forme $y=ax^2+bx+c$.

Son sommet est $S(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{b^2-4ac}{4a})$ et son axe de symétrie a pour équation $x=-\frac{b}{2a}$.

Ainsi $(0\,;\,-2)$ et son axe de symétrie est l'axe des ordonnées.

3- Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de la parabole P avec le cercle C.

Les coordonnées des points d'intersection de la parabole P avec le cercle C vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y=x^2-2\end{cases}$$

On a : $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y=x^2-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\left(x^2-2\right)^2=4\\ y=x^2-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^4-3x^2=0\\ y=x^2-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\left(x^2-3\right)=0\\ y=x^2-2\end{cases}$

Or l'équation $x^2\left(x^2-3\right)=0$ possède 3 solutions : 0 ; $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Donc à l'aide de l'équation $y=x^2-2$ on détermine les ordonnées des points d'intersections respectives : -2 ; 1 et 1.

Les 3 points d'intersection de la parabole P avec le cercle C ont pour coordonnées $(0\,;\,-2)$; $(-\sqrt{3}\,;1)$ et $(\sqrt{3}\,;1)$.

4- Déterminer l'équation d'un cercle qui n'a aucun point d'intersection avec la parabole P.

Un cercle n'ayant pas de point d'intersection avec la parabole P pourrait être :

$\boldsymbol{x^2+(y+5)^2=1}$.

Ce cercle de centre (0 ; -5) et de rayon 1 possède tous ses points en dessous du sommet S de la parabole.

2ème partie :

On considère à présent la parabole P_1 d'équation $y = x^2 + 3$ et le cercle C_1 d'équation $x^2 + (y-1)^2 = 6$.

1- Justifier que la recherche des coordonnées des éventuels points d'intersection de la parabole P_1 avec le cercle C_1 équivaut à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^4 + 5x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Déterminer les points d'intersection de la parabole P_1 avec le cercle C_1 équivaut à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + (y-1)^2 = 6 \end{cases}$$

Or $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + (y-1)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + (x^2 + 3 - 1)^2 = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + (x^2 + 2)^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + x^4 + 4x^2 + 4 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^4 + 5x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

2- On effectue un changement d'inconnue en posant $X = x^2$. Réécrire le système précédent en utilisant cette nouvelle inconnue puis résoudre ce système.

En posant $X = x^2$, l'équation $x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ devient $X^2 + 5X - 2 = 0$. Résolvons-la :

On a : $\Delta = 33 > 0$ donc cette équation possède deux solutions $X_1 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$ et $X_2 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}$.

Or $X = x^2$ et $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$ donc l'équation possède 2 solutions :

$x_1 = -\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}$.

Déterminons les ordonnées des points correspondants.

$$y_1 = x_1^2 + 3 = \left(-\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}\right)^2 + 3 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2} + 3 = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$$

Et $y_2 = x_2^2 + 3 = \left(\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}\right)^2 + 3 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2} + 3 = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$

3- En déduire la réponse au problème posé.

La parabole P_1 d'équation $y = x^2 + 3$ et le cercle C_1 ont deux points d'intersection de coordonnées :

$\left(-\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}} ; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$ **et** $\left(\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}} ; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$

Exercice 7	Chapitre abordé : variations de fonctions
	Compétences travaillées : Calculer

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir étudié leur domaine de dérivabilité :

$f(x) = 5x^2 - 3x + 5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 10x - 3$

$g(x) = \frac{1}{7x^2+2x-1}$

$7x^2 + 2x - 1$ a pour discriminant 32. Il possède 2 racines $x_1 = \frac{-1-2\sqrt{2}}{7}$ et $x_2 = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{-1-2\sqrt{2}}{7} ; \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}\}$ et on a $g'(x) = -\frac{14x+2}{(7x^2+2x-1)^2}$

$h(x) = \sqrt{5x+1}$

$5x + 1 > 0$ si $x > -\frac{1}{5}$ donc h est dérivable sur $]-\frac{1}{5} ; +\infty[$ et on a : $h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

$i(x) = \frac{3x+2}{4x-1}$

i est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{4}\}$ et on a $i'(x) = \frac{-11}{(4x-1)^2}$

$j(x) = (3x+7)^6$

j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $j'(x) = 18(3x+7)^5$

$k(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a $k'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

$l(x) = x^2\sqrt{2x-4}$

$2x - 4 > 0$ si $x > 2$ donc l est dérivable sur $]2 ; +\infty[$

$l'(x) = 2x\sqrt{2x-4} + x^2 \times \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{2x\sqrt{2x-4}\times\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}} + \frac{x^2}{\sqrt{2x-4}} = \frac{5x^2-8x}{\sqrt{2x-4}}$

$m(x) = e^{3x-1}$

m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $m'(x) = 3e^{3x-1}$

$n(x) = (3x-2)e^{-2x}$.

n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $n'^{(x)} = 3 \times e^{-2x} + (3x-2) \times (-2)e^{-2x} = (-6x+7)e^{-2x}$

Exercice 8	Chapitre abordé : Fonction exponentielle
	Compétences travaillées : chercher – calculer – raisonner – Communiquer

Chaque mois, une entreprise peut extraire entre 500 et 3 000 tonnes de minerai ; ces quantités seront exprimées par la suite en milliers de tonnes. Le résultat de l'exploitation, en centaine de milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 3] par :

$$f(x) = (6x-4)e^{-x+2} + 2x$$

1- g est la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 3] par : $g(x) = (10-6x)e^{-x+2} + 2$.

a. Déterminer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 3].

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 3] et on a :

$$\boldsymbol{g'(x) = -6e^{-x+2} + (10-6x)\times(-1)e^{-x+2}}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = (6x-16)e^{-x+2}}$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle [0,5 ; 3].

Signe de la fonction dérivée :

x	0,5		8/3		3
$6x-16$		$-$	0	$+$	
$e^{(-x+2)}$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Variations de la fonction g sur l'intervalle [0,5 ; 3].

x	0,5		8/3		3
$g(x)$	$7e^{(1.5)}+2$	↘	$-6e^{(-2/3)}+2$	↗	$-8e^{(-1)}+2$

x	0,5		8/3		3
$g(x)$	33,37	↘	-1.08	↗	-0.94

c. Calculer $g(2)$.

$$\boldsymbol{g(2) = (10-6\times 2)e^{-2+2} + 2 = -2+2 = 0}$$

d. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 3].

x	0,5		a		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Or $g(2) = 0$ donc on a :

x	0.5		2		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2- a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 3].

On a : $f(x) = (6x-4)e^{-x+2} + 2x$

Donc $f'(x) = 6e^{-x+2} + (6x-4)\times(-1)e^{-x+2} + 2 = (-6x+10)e^{-x+2} + 2 = g(x)$

On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 3].

x	0.5	2	3
$f(x)$	↗	$f(2)$	↘

b. En déduire la quantité de minerai à extraire pour obtenir un résultat d'exploitation maximum.

Il faut extraire 2 000 tonnes de minerai pour obtenir un résultat d'exploitation maximum.

Ce résultat est de 1 200 000 € car $\boldsymbol{f(2) = (6 \times 2 - 4)e^{-2+2} + 2 \times 2 = 8 + 4 = 12.}$

Exercice 9	**Chapitre abordé : Fonction exponentielle**
	Compétences travaillées : chercher – calculer – raisonner – Communiquer

On s'intéresse, dans cet exercice, à l'évolution du taux d'alcool dans le sang d'un individu après ingestion d'une boisson alcoolisée. Ce taux est donné en g.L^{-1}.

Une étude sur un jeune homme de 64 kg ayant ingéré une dose de 33g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans son sang, en fonction du temps t exprimé en heure, peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}025\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}$$

1- Un taux d'alcool dans le sang inférieur à 0,001 g.L^{-1}est considéré comme négligeable. En utilisant la calculatrice déterminer à partir de combien de temps le taux d'alcool de ce jeune homme est négligeable.

En utilisant la calculatrice, le taux d'alcool dans le sang est inférieur à 0,001 g.L^{-1} au bout de 10 heure environ.

2- Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0{,}025\,;\,+\infty[$ la fonction dérivée de la fonction f est :

$$f'(t) = (2{,}05 - 2t)e^{-t}$$

Pour tout réel t de l'intervalle $[0,025\,;\,+\infty[$, on a :

$\boldsymbol{f'(t) = 2e^{-t} + (2t - 0,05) \times (-1)e^{-t} = (2 - 2t + 0,05)e^{-t} = (2,05 - 2t)e^{-t}}$

3- Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0{,}025\,;\,+\infty[$ et en déduire une valeur exacte puis approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang de ce jeune homme.

On a :

t	0.025	1,025	$+\infty$
$2{,}05-2t$	$+$		$-$
$e^{(-t)}$	$+$	0	$+$
$f'(t)$	$+$	0	$-$

Donc

t	0,025	1,025	$+\infty$
$f(t)$	↗	$f(1{,}025)$	↘

Le taux maximum d'alcool dans le sang de ce jeune homme est :

$\boldsymbol{f(1,025) = (2 \times 1,025 - 0,05)e^{-1,025} = 2e^{-1,025} \approx 0,72\ g.L^{-1}}$