Correction de la fiche d’exercices – Bilan année de 2nde – Préparation de la spécialité maths de première

Thème 1 : Nombres et calculs

Exercice 1. Pour chaque question répondre par vrai ou faux. Les réponses doivent être justifiées.

1- Le nombre $\frac{41}{20}$ est un nombre décimal.

Vrai car $\frac{41}{20} = 2,05 = \frac{205}{100}$; $\frac{41}{20}$ peut donc s’écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$.

2- Le nombre réel $\sqrt{26}$ appartient à l’intervalle $]4\,;5{,}099\,]$.

Faux car en utilisant la calculatrice on trouve $\sqrt{26} \approx 5,099019514 \ldots > 5,099$

3- $|-5| + |4| = 1$.

Faux car on a $|-5| + |4| = 5 + 4 = 9$.

4- Si un nombre est un nombre décimal alors c’est un nombre rationnel.

Vrai car un nombre décimal peut s’écrire sous la forme $\frac{a}{10^0}$. Ou bien car l’ensemble des nombres décimaux est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels.

Exercice 2. Les questions sont indépendantes.

1- Déterminer l’ensemble des réels x tels que $x > 1$ et $-2 \leq x < 3$. Donner le résultat sous forme d’un intervalle et d’une inégalité.

Si $x > 1$ et $-2 \leq x < 3$ alors on a : $1 < x < 3$

Avec la notation sous forme d’intervalle : $]1\,;\,+\infty\,[\, \cap [-2\,;3\,[\, = \,]\,1;\,3\,[$

2- Ecrire sous forme d’intervalle l’ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité $|x-2| < 6$.

La distance du point d’abscisse x au point d’abscisse 2 est strictement inférieure à 6, cela signifie que $x \in]2-6\;;\,2+6\,[$ soit $x \in]-4\,;\,8[$.

3- Traduire le fait que le réel x appartient à l’intervalle $[-9\,;7]$ par une inégalité du type $|x - a| \leq r$.

Le centre de l’intervalle $[-9\,;7]$ a pour abscisse $a = \frac{-9+7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, la distance des bornes de l’intervalle à ce point est : $r = \frac{7-(-9)}{2} = \frac{16}{2} = 8$ donc on a : $|x+1| \leq 8$

Exercice 3. On considère l’expression $A\,(x) = 4\,x^2 - 32x + 55$.

1- a- Montrer, en détaillant les étapes, que les expressions suivantes sont égales à $A\,(x)$.

Expression 1 : $(2x-8)^2 - 9$

Expression 2 : $(2x-11)(2x-5)$

Expression 1 : $(2x-8)^2 - 9 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 8 + 8^2 - 9 = 4\,x^2 - 32x + 64 - 9 = 4\,x^2 - 32x + 55 = A(x)$

Expression 2 : $(2x-11)(2x-5) = 2x \times 2x - 2x \times 5 - 11 \times 2x - 11 \times (-5)$

$$= 4\,x^2 - 10x - 22x + 55 = 4\,x^2 - 32x + 55 = A(x)$$

Donc les deux expressions sont bien égales à $A(x)$.

b-Utiliser alors la forme la mieux adaptée de $A(x)$ pour calculer $A(4)$, $A\left(\frac{5}{2}\right)$ et $A(1)$. Détailler les calculs.

$A(4) = (2 \times 4 - 8)^2 - 9 = (8-8)^2 - 9 = 0 - 9 = -9$,

$A\left(\frac{5}{2}\right) = \left(2 \times \frac{5}{2} - 11\right)\left(2 \times \frac{5}{2} - 5\right) = (5-11)(5-5) = -6 \times 0 = 0$ **et**

$A(1) = 4 \times 1^2 - 32 \times 1 + 55 = 4 - 32 + 55 = 59 - 32 = 27$

ou $A(1) = (2 \times 1 - 8)^2 - 9 = (2-8)^2 - 9 = (-6)^2 - 9 = 36 - 9 = 27$

c- Utiliser alors la forme la mieux adaptée de $A(x)$ pour résoudre :

- $A(x) = 0$

On utilise l’expression factorisée (2) : $A(x) = 0 \iff (2x-11)(2x-5) = 0$

$$\iff 2x - 11 = 0 \quad ou \quad 2x - 5 = 0$$

$$\iff 2x = 11 \quad ou \quad 2x = 5$$

$$\iff x = \frac{11}{2} \quad ou \quad x = \frac{5}{2}$$

Donc $S = \left\{\frac{11}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right\}$

- $A(x) = -9$

On utilise l'expression 1 : $A(x) = -9 \iff (2x-8)^2 - 9 = -9$

$\iff (2x-8)^2 = 0$

$\iff 2x - 8 = 0$

$\iff 2\,x = 8$

$\iff x = \dfrac{8}{2}$

$\iff x = 4$

Donc $S = \{\,4\,\}$

- $A(x) = 55$

On utilise l'expression initiale : $A(x) = 55 \iff 4\,x^2 - 32x + 55 = 55$

$\iff 4\,x^2 - 32x = 0$

$\iff 4x\,(x-8) = 0$

$\iff 4x = 0 \quad ou \quad x - 8 = 0$

$\iff x = 0 \quad ou \quad x = 8$

Donc $S = \{\,0\,;8\,\}$

- $A(x) \geq 0$

On utilise l'expression factorisée (2) : $A(x) \geq 0 \iff (2x-11)(2x-5) \geq 0$

On va utiliser un tableau de signes pour résoudre, on cherche d'abord le signe de chaque facteur :

$2x - 11 \geq 0 \iff 2x \geq 11 \iff x \geq \dfrac{11}{2}$

et $2x - 5 \geq 0 \iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
Signe de $(2x-11)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(2x-5)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(2x-11)(2x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc d'après le tableau de signes on a $S = \left]-\infty\,;\ \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{11}{2}\,;\ +\infty\right[$

2- Soit $B(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2$

a- Développer et réduire $B(x)$.

$B(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2$

$B(x) = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - \left(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right)$

$B(x) = x^2 + 4x + 4 - \left(x^2 - 4x + 4\right)$

$B(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4$

$B(x) = 8\,x$

b- En déduire, en écrivant vos calculs et sans utiliser la calculatrice la valeur de : $1\,002^2 - 998^2$.

$$1\,002^2 - 998^2 = (1\,000 + 2)^2 - (1\,000 - 2)^2 = B(1\,000)$$

On a vu à la question précédente que $B(x) = 8\,x$ **donc** $B(1\,000) = 8 \times 1\,000 = 8\,000$

Donc $1\,002^2 - 998^2 = 8\,000$

Exercice 4. Les questions sont indépendantes.

1- On considère l'expression suivante : $C(x) = (2x+3)^2 - 49$

a- Développer et réduire $C(x)$.

$C(x) = (2x+3)^2 - 49$

$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - 49$

$= 4\,x^2 + 12x + 9 - 49$

$= 4\,x^2 + 12x - 40$

b- Factoriser $C(x)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C(x)} &= (\boldsymbol{2x+3})^2 - \boldsymbol{7}^2\\ &= [(\boldsymbol{2x+3}) - \boldsymbol{7}][(\boldsymbol{2x+3}) + \boldsymbol{7}]\\ &= (\boldsymbol{2x-4})(\boldsymbol{2x+10})\end{aligned}$$

c- Résoudre les équations suivantes :

- $C(x) = 0$.

  $\boldsymbol{C(x) = 0 \iff (2x-4)(2x+10) = 0 \iff (2x-4) = 0 \quad ou \quad (2x+10) = 0}$

  $\boldsymbol{\iff 2x = 4 \quad ou \quad 2x = -10 \iff x = \frac{4}{2} = 2 \quad ou \quad x = \frac{-10}{2} = -5}$ $\qquad \boldsymbol{S = \{-5\,;2\}}$

- $C(x) = -49$.

  $\boldsymbol{C(x) = -49 \iff (2x+3)^2 - 49 = -49 \iff (2x+3)^2 = 0 \iff 2x+3 = 0 \iff 2x = -3}$

  $\boldsymbol{\iff x = \frac{-3}{2}}$ $\qquad \boldsymbol{S = \left\{\frac{-3}{2}\right\}}$

2- On considère l'expression suivante : $D(x) = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-7)$

a- Démontrer que $D(x) = 3x^2 + 17x - 6$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D(x)} &= \boldsymbol{(3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 - (6x^2 - 21x - 2x + 7)}\\ &= \boldsymbol{9\,x^2 - 6x + 1 - 6\,x^2 + 21x + 2x - 7}\\ &= \boldsymbol{3\,x^2 + 17x - 6}\end{aligned}$$

b- Factoriser $D(x)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D(x)} &= \boldsymbol{\underline{(3x-1)}(3x-1) - \underline{(3x-1)}(2x-7)}\\ &= \boldsymbol{\underline{(3x-1)}[(3x-1) - (2x-7)]}\\ &= \boldsymbol{(3x-1)(3x-1-2x+7)}\\ &= \boldsymbol{(3x-1)(x+6)}\end{aligned}$$

c- Résoudre les équations suivantes :

- $D(x) = 0$.

  $\boldsymbol{(3x-1)(x+6) = 0 \iff (3x-1) = 0 \quad ou \quad (x+6) = 0 \iff 3x = 1 \quad ou \quad x = -6}$

  $\boldsymbol{\iff x = \frac{1}{3} \quad ou \quad x = -6}$ $\qquad \boldsymbol{S = \left\{\frac{1}{3}\,;-6\right\}}$

- $D(x) = -6$.

  $\boldsymbol{3\,x^2 + 17x - 6 = -6 \iff 3\,x^2 + 17x = 0 \iff x(3x+17) = 0}$

  $\boldsymbol{\iff x = 0 \quad ou \quad (3x+17) = 0 \iff x = 0 \quad ou \quad 3x = -17}$

  $\boldsymbol{\iff x = 0 \quad ou \quad x = \frac{-17}{3}}$ $\qquad \boldsymbol{S = \left\{0\,;\frac{-17}{3}\right\}}$

Exercice 5. Les questions sont indépendantes.

1- Simplifier, en détaillant les calculs : $2\sqrt{20} + \sqrt{45} - 3\sqrt{500}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{2\sqrt{20} + \sqrt{45} - 3\sqrt{500}} &= \boldsymbol{2\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{100 \times 5}}\\ &= \boldsymbol{2\sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{100} \times \sqrt{5}}\\ &= \boldsymbol{2 \times 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 3 \times 10\sqrt{5}}\\ &= \boldsymbol{4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 30\sqrt{5}}\\ &= \boldsymbol{-23\sqrt{5}}\end{aligned}$$

2- Développer et simplifier, en détaillant les calculs :

- $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\left(5 + 3\sqrt{2}\right)^2} &= \boldsymbol{5^2 + 2 \times 5 \times 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \boldsymbol{25 + 30\sqrt{2} + 9 \times 2}\\ &= \boldsymbol{43 + 30\sqrt{2}}\end{aligned}$$

- $(3\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})$

$$\begin{aligned}(3\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5}) &= 3\sqrt{5}\times 3-3\sqrt{5}\times\sqrt{5}-2\times 3+2\sqrt{5}\\ &= 9\sqrt{5}-3\times 5-6+2\sqrt{5}\\ &= -21+11\sqrt{5}\end{aligned}$$

- $(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)$

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) &= \sqrt{5}^2-3^2\\ &= 5-9\\ &= -4\end{aligned}$$

Exercice 6. Les questions sont indépendantes.

1- Résoudre le système suivant par la méthode de substitution : $\begin{cases}5x+3y=9\\ 2x-y=8\end{cases}$

On isole y dans la ligne 2, on obtient : $\begin{cases}5x+3y=9\\ y=2x-8\end{cases}$

$\begin{cases}5x+3(2x-8)=9\\ y=2x-8\end{cases}$ **On remplace y par son expression obtenue dans la ligne 1 (L1)**

$\begin{cases}5x+6x-24=9\\ y=2x-8\end{cases}$ **On développe et réduit la L1.** $\begin{cases}11x-24=9\\ y=2x-8\end{cases}$

La L1 donne : $11x-24=9$ donc $11x=9+24=33$ donc $x=\frac{33}{11}=3$.

On obtient : $\begin{cases}x=3\\ y=2x-8\end{cases}$

Puis, on remplace x par sa valeur trouvée dans L2 : $\begin{cases}x=3\\ y=2\times 3-8=-2\end{cases}$ **Ainsi : $S=\{(3;-2)\}$**

2- Résoudre le système suivant par la méthode de combinaison linéaire : $\begin{cases}7x-2y=4\\ 6x+3y=5\end{cases}$

En multipliant la ligne 1 par 3 et la ligne 2 par 2, on obtient : $\begin{cases}3\times 7x-3\times 2y=3\times 4\\ 2\times 6x+2\times 3y=2\times 5\end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases}21x-6y=12\\ 12x+6y=10\end{cases}$ **Pour trouver la valeur de x, on additionne les deux lignes :** $\dfrac{\begin{cases}21x-6y=12\\ 12x+6y=10\end{cases}}{21x+12x+0y=12+10}$

On trouve : $33x=22$ donc $x=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}$.

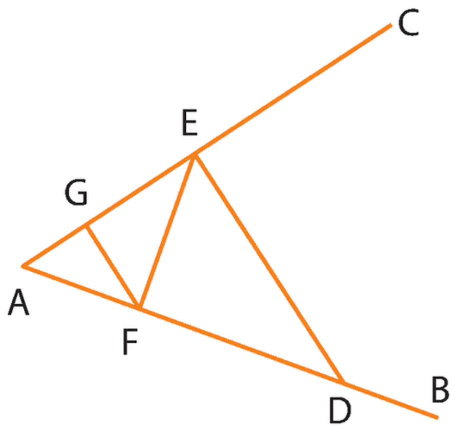
En multipliant la ligne 1 par 6 et la ligne 2 par -7, on obtient : on obtient : $\begin{cases}6\times 7x-6\times 2y=6\times 4\\ -7\times 6x-7\times 3y=-7\times 5\end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases}42x-12y=24\\ -42x-21y=-35\end{cases}$ **Pour trouver la valeur de y, on additionne les deux lignes :** $\dfrac{\begin{cases}42x-12y=24\\ -42x-21y=-35\end{cases}}{0x-12y-21y=24-35}$

On trouve : $-33\,y=-11 \Leftrightarrow y=\frac{-11}{-33}=\frac{1}{3}$ **Ainsi : $S=\left\{\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)\right\}$**

Thème 2 : Géométrie

Exercice 7.



Dans la figure ci-contre, on considère les demi-droites [AB) et [AC) ainsi que les points D, E, F et G tels que : AD = 7,5 ; AE = 4,5 ; DE = 6 et AF = 3.

De plus les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

1- Montrer que le triangle AED est rectangle.

Le plus long côté est AD, on a

$$AD^2 = 7,5^2 = 56,25$$

$$et \;\; EA^2 + ED^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$$

Donc : $AD^2 = EA^2 + ED^2$, **l'égalité de Pythagore est respectée donc AED est un triangle rectangle en E.**

(ou d'après la réciproque du théorème de Pythagore)

2- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EAD}$. Arrondir au degré.

DAE rectangle en E donc en utilisant la trigonométrie :

$$tan\,(\widehat{EAD}) = \frac{ED}{EA} \Leftrightarrow tan\,(\widehat{EAD}) = \frac{6}{4,5} \Leftrightarrow \widehat{EAD} \approx 53°$$

3- Quel est le projeté orthogonal de F sur (AC) ? Justifier la réponse.

$(DE) // (FG)\; et\; (DE) \perp (AE)$ **donc** $(FG) \perp (AE)$ **soit** $(FG) \perp (AC)$

De plus $G \in (AC)$

donc G est le projeté orthogonal de F sur (AC).

4- Calculer AG et GF.

Les droites (GE) et (FD) sont sécantes en A et (DE) // (FG) d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD} = \frac{GF}{ED} \Leftrightarrow \frac{AG}{4,5} = \frac{3}{7,5} = \frac{GF}{6} \text{ donc } AG = 3 \times 4,5 \div 7,5 = 1,8\,cm$$

$$et \;\; GF = 3 \times 6 \div 7,5 = 2,4\,cm$$

5- Calculer l'aire du triangle AFG.

Le triangle AFG est rectangle en G donc on a : $Aire\,(AFG) = \frac{AG \times GF}{2} = \frac{1,8 \times 2,4}{2} = 2,16\,cm^2$.

Exercice 8.

Dans un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points :

$A(2\,;\,3)$; $B(9\,;\,4)$; $C(4\,;\,-1)$ et $D(7\,;3)$

1. Calculer la longueur AB.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$AB = \sqrt{(9-2)^2 + (4-3)^2}$$
$$AB = \sqrt{7^2 + 1^2}$$
$$AB = \sqrt{49 + 1}$$
$$AB = \sqrt{50}$$

2. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment [AC].

$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$ **et** $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$

$x_M = \frac{2+4}{2}$ **et** $y_M = \frac{3+(-1)}{2}$

$x_M = 3$ **et** $y_M = 1$ **Ainsi** $M(3\,;1)$

3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}\binom{x_C - x_B}{y_C - y_B} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BC}\binom{4-9}{-1-4} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BC}\binom{-5}{-5}$

4. Les points B,M et D sont-ils alignés ?

Les points B,M et D sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
Rappelons que $B(9\,;\,4)$; $M(3\,;1)$ et $D(7\,;3)$

Ainsi $\overrightarrow{BM}\binom{-6}{-3}$ et $\overrightarrow{BD}\binom{-2}{-1}$
On a donc $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BD}$
Leurs coordonnées sont proportionnelles donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points sont alignés.

Autre méthode : $\det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-6)\times(-1) - (-2)\times(-3) = 0.$

donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points sont alignés.

5. Le triangle ABC est-il isocèle en B ?

On a $AB = \sqrt{50}$

On calcule : $BC = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$
$AB = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

6. Calculer les coordonnées du point E tel que ABCE soit un losange.

Puisque AB=BC,

ABCE soit un losange $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$

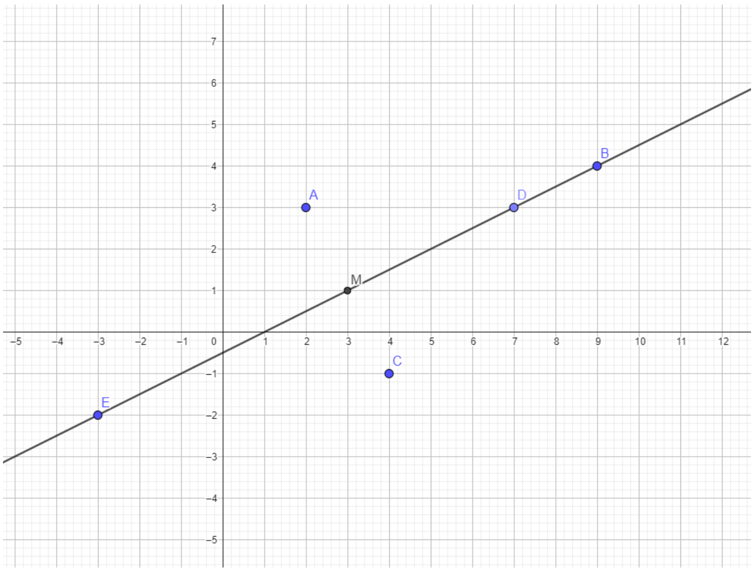
$\Leftrightarrow \binom{-5}{-5} = \binom{x_E - x_A}{y_E - y_A}$

$\Leftrightarrow \binom{-5}{-5} = \binom{x_E - 2}{y_E - 3}$

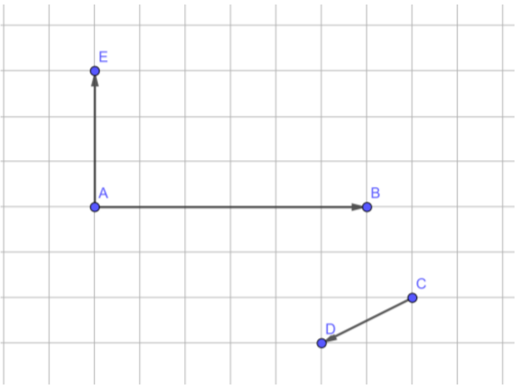
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3 \\ y_E = -2 \end{cases}$

Ainsi $E(-3\,;\,-2)$

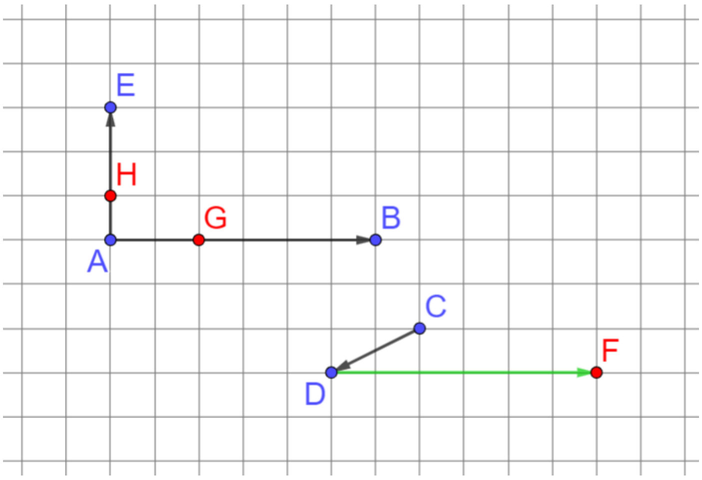


Exercice 9.



1- Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$.

2- Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.



3- a- Compléter l'égalité suivante en utilisant la relation de Chasles) : $\boldsymbol{\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AG}}$

b- En déduire que $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}}$$

c- Que peut-on dire des droites (HG) et (EB) ? Justifier votre réponse.

$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$, donc $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires donc (HG)//(EB)

Exercice 10. Les questions sont indépendantes.

1- Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ passant par $A(-3\ ;\ 1)$.

Soit un point $M(x\ ;\ y)$ de la droite d.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{det(\overrightarrow{AM}\ ;\vec{u}) = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x+3 & -2\\y-1 & 5\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{5(x+3) - (-2)(y-1) = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{5x + 15 + 2y - 2 = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{5x + 2y + 13 = 0}$

Une équation cartésienne de (d) est : $5x + 2y + 13 = 0$.

<u>Autre méthode :</u>

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) or $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de (d) est de la forme :

$5x + 2y + c = 0$ (en effet : $-b = -2et\ a = 5$)

$A(-3\ ;\ 1) \in (d)$ $\Leftrightarrow$ $5 \times (-3) + 2 \times 1 + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = 13$

Une équation cartésienne de (d) est donc : $\boldsymbol{5x+2y+13=0}$

2- a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(1\,;\,-4)$ et $B(3\,;\,2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\2-(-4)\end{pmatrix}$ $soit$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de (AB) donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme** $\boldsymbol{6x-2y+c=0}$ **(en effet :** $\boldsymbol{-b=2\ et\ a=6}$**)**

$\boldsymbol{B(3\,;\,2)\in(AB) \iff 6\times3-2\times2+c=0 \iff c=-14}$

Une équation cartésienne de (AB) est donc : $\boldsymbol{6x-2y-14=0}$

b- En déduire l'équation réduite de (AB).

$\boldsymbol{6x-2y-14=0 \iff 6x-14=2y \iff y=3x-7}$

3- a- Déterminer l'équation réduite de la droite (CD) telle que $C(-2\,;\,3)$ et $D(2\,;1)$.

L'équation réduite de (CD) est de la forme $\boldsymbol{y=ax+b}$**.**

- ✓ **Déterminons le coefficient directeur :** $\boldsymbol{a=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\frac{3-1}{-2-2}=\frac{2}{-4}=-0,5}$

  Donc l'équation de (CD) est de la forme : $\boldsymbol{y=-0,5x+b}$

- ✓ **Déterminons l'ordonnée à l'origine b :**

  Puisque $\boldsymbol{C\in(CD)}$**, on peut substituer ses coordonnées dans l'expression précédente pour obtenir :**

  $\boldsymbol{3=-0,5\times(-2)+b \iff 3=1+b \iff b=2}$

  Donc l'équation réduite de (CD) est : $\boldsymbol{y=-0,5x+2}$

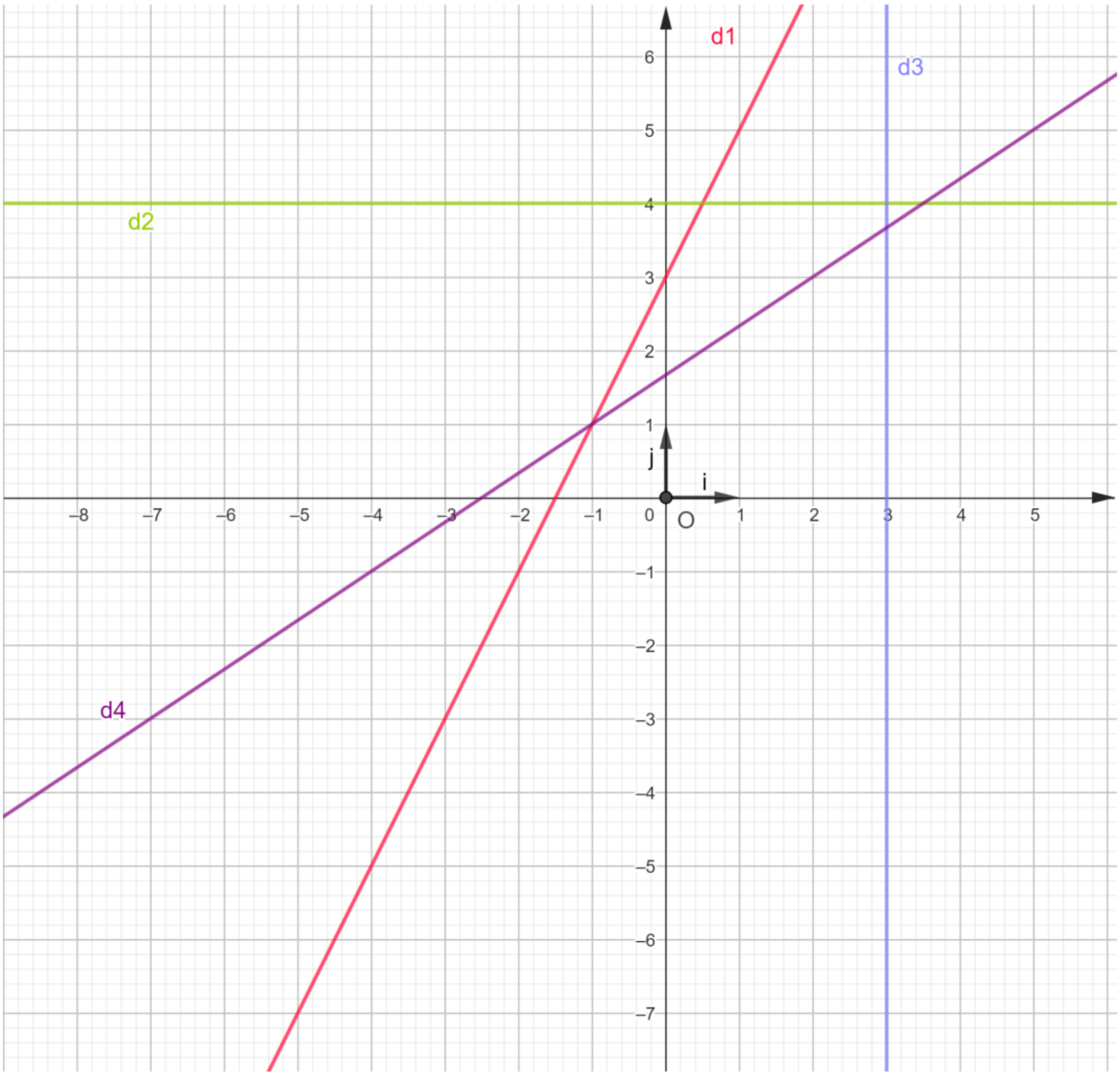
c- Le point $E(-1\,;\,0)$ appartient-il à la droite (CD) ?

Si les coordonnées de E vérifient l'équation de la droite (CD) on aura $\boldsymbol{E\in(CD)}$**.**

Or $\boldsymbol{-0,5\times(-1)+2=2,5\neq0}$ **donc** $\boldsymbol{E\notin(CD)}$**.**

4- Dans le repère $(O;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, tracer les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 d'équations respectives :

$$y=2x+3,\quad y=4,\quad x=3\quad et\quad 2x-3y+5=0$$



Exercice 11.
Pour chaque affirmation répondre par vrai ou faux. Les réponses doivent être justifiées.
On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction g .

x	-5		0		1		8
g	1	↘	0	↗	4	↘	-6

- **Affirmation 1 :** L'ensemble de définition de g est $[-6\,;1]$
  Faux car d'après la première ligne du tableau, l'ensemble de définition est $[-5;8]$

- **Affirmation 2 :** 0 possède deux antécédents par la fonction g .
  Vrai car d'après le tableau, 0 admet deux antécédents : 0 et un réel compris entre 1 et 8.

- **Affirmation 3 :** $g(-4) \geqslant g(-3)$.
  Vrai : d'après le tableau de variations, g est strictement décroissante sur $]-5\,;0[$.
  Or $-4 \in]-5;0[$ et $-3 \in]-5;0[$ et $-4 < -3$ donc $g(-4) \geqslant g(-3)$

- **Affirmation 4 :** Le maximum de g sur $[-5;-\frac{1}{2}]$ est 4.
  Faux : d'après le tableau de variations, g est strictement décroissante sur $]-5\,;0[$.
  Donc pour tout $x \in [-5;-\frac{1}{2}]$, comme $-5 \leqslant x$, $g(-5) \geqslant g(x)$ donc $1 \geqslant g(x)$ donc le maximum de la fonction g sur $[-5;-\frac{1}{2}]$ est 1 et non 4.

- **Affirmation 5 :** La fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;4]$.
  Faux parce que les flèches dans le tableau de variation indiquent que g est décroissante sur $[1;4]$

Exercice 12.
On considère la fonction g définie sur $[-8\,;\ 8\,]$ par $g(x) = -3x^2 + 2$

1- Démontrer que g est croissante sur $[-8\,;\ 0]$ puis décroissante sur $[0\,;\ 8]$.

- **Soient a et b appartenant à $[-8\,;0]$ tels que $a < b$.**

Puisque la fonction carrée est décroissante sur R^-,
on a : $a^2 > b^2$ en multipliant par -3 (négatif), on obtient $-3a^2 < -3b^2$
et en additionnant 2, on obtient $-3\,a^2 + 2 < -3\,b^2 + 2$
C'est-à-dire $g(a) < g(b)$ donc g est croissante sur $[-8\,;0]$

- **Soient a et b appartenant à $[\,0\,;8\,]$ tels que $a < b$.**

Puisque la fonction carrée est croissante sur R^+,
on a : $a^2 < b^2$ en multipliant par -3 (négatif), on obtient $-3\,a^2 > -3\,b^2$
et en additionnant 2, on obtient $-3a^2 + 2 > -3\,b^2 + 2$
C'est-à-dire $g(a) > g(b)$ donc g est décroissante sur $[\,0\,;8\,]$

2- Etudier la parité de la fonction g.
Pour tout $x \in [-8\,;8\,]$, on a aussi $-x \in [-8\,;8\,]$, de plus $g(-x) = -3(-x)^2 + 2 = -3x^2 + 2 = g(x)$ donc la fonction g est paire.

3- Donner un encadrement de $g(x)$ quand $-3 < x < 2$.
Sur $]-3\,;\ 0]$, g est croissante donc pour $-3 < x \leq 0$, on a $g(-3) < g(x) \leq g(0)$
Or $g(-3) = -3 \times (-3)^2 + 2 = -27 + 2 = -25$ et $g(0) = -3 \times 0^2 + 2 = 2$
donc sur $]-3\,;\ 0]$, on a : $-25 < g(x) \leq 2$.
Sur $[0\,;\ 2\,[$, g est décroissante donc pour $0 \leq x < 2$, on a $g(0) \geq g(x) > g(2)$
Or $g(2) = -3 \times 2^2 + 2 = -12 + 2 = -10$
donc sur $[0\,;\ 2\,[$, on a : $2 \geq g(x) > -10$ soit $-10 < g(x) \leq 2$.
Bilan : Sur $]-3\,;\ 2[$, on a : : $-25 < g(x) \leq 2$.

Exercice 13.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 6$.

1- Démontrer que f est croissante.

Soient a et b appartenant à $[\,0\,;20\,]$ tels que $a < b$.

Puisque la fonction racine carrée est croissante sur R^+,

on a : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ **en multipliant par 2(positif), on obtient** $2\sqrt{a} < 2\sqrt{b}$

et en additionnant -6, on obtient $2\sqrt{a} - 6 < 2\sqrt{b} - 6$

C'est-à-dire $f(a) < f(b)$ **donc f est croissante sur $[\,0\,;20\,]$**

2- Calculer l'image de 16 par f.

L'image de 16 par f est $f(16) = 2\sqrt{16} - 6 = 2 \times 4 - 6 = 2$

3- Déterminer l'antécédent de 16 par f.

L'antécédent de 16 par f est solution de $f(x) = 16$

or $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 6 = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 22 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 11 \Leftrightarrow x = 121$

Donc l'antécédent de 16 par f est 121.

Exercice 14.

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$

1- Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

Le dénominateur d'une fraction ne doit pas être nul donc

l'ensemble de définition de la fonction f est $R^* =]-\infty\,;0\,[\, \cup \,]\,0\,;\,+\infty[$

2- Etudier les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

- **Soient a et b appartenant à $]-\infty\,;0\,[$ tels que $a < b$.**

  Puisque la fonction inverse est décroissante sur R^-,

  on a : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ **en multipliant par -2(négatif), on obtient** $-\frac{2}{a} < -\frac{2}{b}$

  et en additionnant 3, on obtient $-\frac{2}{a} + 3 < -\frac{2}{b} + 3$

  C'est-à-dire $f(a) < f(b)$ **donc f est croissante sur $]-\infty\,;0\,[$**

- **Soient a et b appartenant à $]\,0\,;\,+\infty\,[$ tels que $a < b$.**

  Puisque la fonction inverse est décroissante sur R^+,

  on a : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ **en multipliant par -2(négatif), on obtient** $-\frac{2}{a} < -\frac{2}{b}$

  et en additionnant 3, on obtient $-\frac{2}{a} + 3 < -\frac{2}{b} + 3$

  C'est-à-dire $f(a) < f(b)$ **donc f est croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$**

3- Quelle est l'image de 3 par f ? L'image de $\frac{1}{5}$ par f ?

L'image de 3 par f est $f(3) = 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

L'image de $\frac{1}{5}$ par f est $f\left(\frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{\frac{1}{5}} = 3 - 2 \times \frac{5}{1} = 3 - 10 = -7$

4- Donner un encadrement de $f(x)$ quand $-2 < x < -1$.

Sur $]-2\,;\,-1\,[$, f est croissante donc pour $-2 < x < -1$, on a $f(-2) < f(x) < f(-1)$

Or $f(-2) = 3 - \frac{2}{-2} = 3 + 1 = 4$ **et** $f(-1) = 3 - \frac{2}{-1} = 3 + 2 = 5$

donc quand $-2 < x < -1$, on a : $4 < f(x) < 5$.

Exercice 15.
On considère la fonction f dont on dispose de la représentation graphique dans le repère ci-dessous.

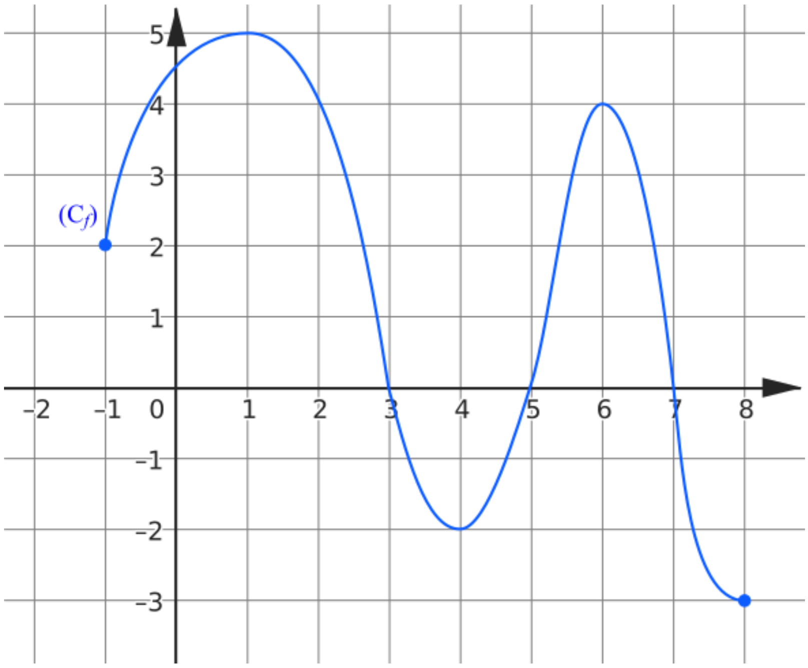


Figure 1

Partie A :

1- Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

Le domaine de définition de la fonction f est $[-1\,;8]$

2- Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?

L'image de 2 par la fonction f est $f(2) = 4$.

3- Donner le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction f.
Avec la précision permise par la représentation graphique, les antécédents de 2 sont : $-1\,;2,7\,;5,3$ *et* $6,8$.

4- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -1$.
Avec la précision permise par la représentation graphique, $S = [\,3,2\,;4,8\,]$

5- Construire le tableau de signes de la fonction f.

x	-1		3		5		7		8
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

6- Construire le tableau de variations de la fonction f.

x	-1		1		4		6		8
$f(x)$	2	↗	5	↘	-2	↗	4	↘	-3

7- Quels sont les extremums de la fonction f ?
Le maximum de f est 5, il est atteint pour $x = 1$ et le minimum de f est -3, il est atteint pour $x = 8$.

Partie B :

Dans cette partie, on considère la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(-3) = -11$ et $g(5) = 13$

1- Déterminer, par le calcul, l'expression de la fonction g.

g est affine donc de la forme $g(x) = ax + b$.

- ✓ **Déterminons le coefficient directeur :**

$$a = \frac{g(5) - g(-3)}{5 - (-3)} = \frac{13 - (-11)}{5 + 3} = \frac{24}{8} = 3$$

Donc l'expression est $g(x) = 3x + b$

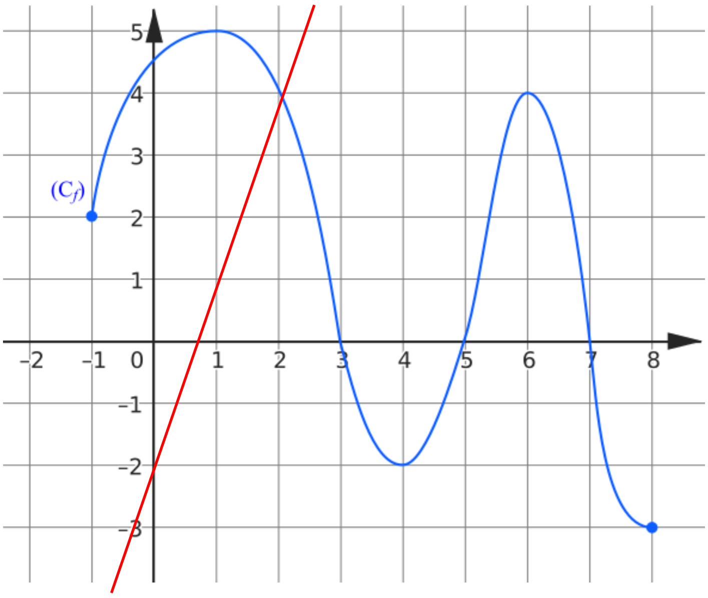
- ✓ **Déterminons l'ordonnée à l'origine b :**

Puisque $g(5) = 13$, on peut substituer ces données dans l'expression précédente pour obtenir :

$$g(5) = 3 \times 5 + b \quad \Leftrightarrow \quad 13 = 15 + b$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -2$$

Donc l'expression est $g(x) = 3x - 2$

2- Construire, dans le même repère que la fonction f, la représentation graphique de fonction g.



3- Etablir le tableau de signes de la fonction g.

Tout d'abord observons que : $3x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{2}{3}$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

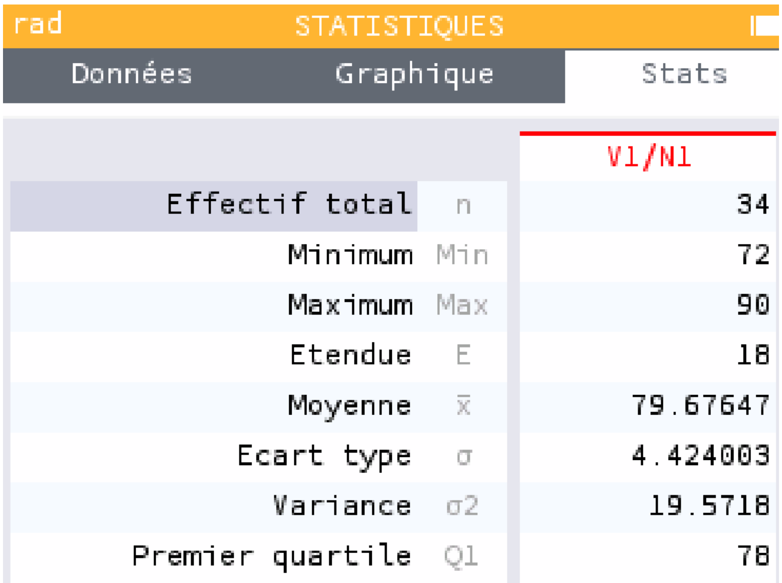
Exercice 16.
Le rythme cardiaque au repos des élèves d'une classe de Seconde a été relevé lors d'une séance de TP de SVT. Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Rythme cardiaque (en bpm*)	72	73	75	77	78	79	80	82	84	85	88	90
Effectifs	2	3	2	1	5	4	6	2	4	3	1	1
ECC	**2**	**5**	**7**	**8**	**13**	**17**	**23**	**25**	**29**	**32**	**33**	**34**

** bpm = battements par minutes*

1- Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants.
Voir tableau ci-dessus
2- Calculer, en justifiant, le rythme cardiaque moyen. Arrondir au dixième.
$$\overline{x} = \frac{2\times 72 + 3\times 73 + 2\times 75 + 1\times 77 + 5\times 78 + 4\times 79 + 6\times 80 + 2\times 82 + 4\times 84 + 3\times 85 + 1\times 88 + 1\times 90}{34}$$
$\overline{x} = \frac{2709}{34} \approx 79,7$ **bpm**
3- Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
L'étendue de la série est $90 - 72 = 18$ bpm
4- L'affirmation : « Au moins 25 % des élèves ont un rythme cardiaque inférieur à 77 bpm. » est-elle vraie ?
Il y a $\frac{7}{34} \approx 20,6\ \%$ des élèves qui ont un rythme cardiaque inférieur à 77 bpm donc l'affirmation est fausse.
5- Déterminer, en justifiant, la médiane puis les premier et troisième quartiles de cette série.
L'effectif total est pair donc la médiane se situe entre la 17^{ième} et la 18^{ième} valeur de cette série, donc la médiane correspond à 79,5 bpm.
Le premier quartile se situe à la 9^{ième} valeur donc $Q1 = 78$ bpm.
Le troisième quartile se situe à la 26^{ième} valeur donc $Q3 = 84$ bpm.
6- Quel est le pourcentage d'élèves qui ont un rythme cardiaque d'au moins 84 bpm ? Arrondir au centième.
Il y a 9 élèves qui ont un rythme cardiaque d'au moins 84 bpm ce qui représente $\frac{9}{34} \approx 26,47\ \%$
7- En utilisant le mode « statistiques » de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la variance de cette série et en déduire la valeur arrondie au centième de l'écart type.

Avec le mode « statistiques » de la calculatrice on obtient :



On peut donc voir que $V \approx 19,57$ donc on a : $\sigma = \sqrt{19,57} \approx 4,42$

Remarque : Pour justifier la valeur de V donnée par la calculatrice on peut utiliser : $V = \frac{216\,509}{34} - \left(\frac{2709}{34}\right)^2$

Exercice 17.

Pour chaque question trouver la (les) bonne(s) réponse(s). Les réponses doivent être justifiées.

1- Après une augmentation de 25 %, pour revenir au prix de départ, il faut :

a) diminuer de 25 € b) diminuer de 25 % c) diminuer de 20 % d) diminuer de 1,25

Réponse c) diminuer de 20 %

Augmenter de 25 % revient à multiplier par 1,25. Pour retrouver la valeur initiale, il faut diviser par 1,25, ce qui revient à multiplier par l'inverse de 1,25 qui est 1 ÷ 1,25=0,8. Ce qui correspond à une diminution de 20%.

2- Pour calculer directement le résultat après 5 diminutions de 40 %, je multiplie par :

a) $5 \times 0{,}6$ b) $5 + 0{,}6$ c) $\frac{0{,}6}{5}$ d) $0{,}6^5$

Réponse d) $0,6^5$

Diminuer de 40% revient à multiplier par 0,6. On multiplie 5 fois par 0,6, donc on multiplie par $0{,}6^5$.

3- Un article coûte actuellement 369,60 €. Sachant qu'il avait subi une augmentation de 10 % puis une baisse de 20 %, son prix initial était :

a) 399,20 € b) 406,60 € environ c) 420 € d) 332,60 €

Réponse c) 420 €

Pour retrouver le prix de départ, on calcule : $\mathbf{369,60 \ \div \ 0,8 \ \div \ 1,1}$

4- Passer de 75 € à 84 €, c'est une augmentation de :

a) 112 % b) 12 % c) 10,7 % environ d) 89,3 % environ

Réponse b) 12 %

$\frac{\mathbf{84-75}}{\mathbf{75}} = \mathbf{0,12}$**, c'est donc une augmentation de 12 %**

5- 60 % des ventes d'un concessionnaires sont des voitures familiales. Parmi celles-ci, 20 % sont de couleur blanche. La proportion de voitures familiales blanches parmi les ventes de ce concessionnaire est :

a) 80 % b) 12 % c) 15 % d) 40 %

Réponse b) 12 %

On a 20% de voitures de couleur blanche parmi les 60% de voitures familiales donc $\mathbf{0,2 \times 0,6}$

Exercice 18.

Dans un jardin, on a seulement des tulipes et des roses rouges ou jaunes. On cueille une fleur au hasard. On définit les événements : R : « La fleur est rouge » et T : « La fleur est une tulipe »

1- En utilisant les événements définis ci-dessus ainsi que les notations d'événements contraires, d'union ou d'intersection d'événements, traduire les événements suivants :

a- « La fleur est une tulipe rouge ».
« La fleur est une tulipe rouge » : $\boldsymbol{T \cap R}$

b- « La fleur est jaune ou est une rose ».
« La fleur est jaune ou est une rose » : $\boldsymbol{\overline{R} \cup \overline{T}}$ ou $\boldsymbol{\overline{T \cap R}}$

2- Décrire par une phrase les événements suivants :

a- $\overline{T} \cup R$
« La fleur est rouge ou est une rose »

b- $\overline{R} \cap T$
« La fleur est une tulipe jaune »

Exercice 19.
Un dé dodécaédrique comporte 12 faces numérotées de 1 à 12. On suppose que ses faces ont chacune la même probabilité de sortie. On jette le dé et on note le nombre écrit sur la face supérieure du dé. On considère les événements :

- A : « Le nombre obtenu est pair »
- B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 9 »
- C : « Le nombre obtenu est strictement inférieur à 6 »

1- Donner la liste des issues possibles des événements :

➢ $A \cap B$ = **{10 ; 12 }**

➢ $B \cup C$ = **{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 }**

➢ $A \cup \bar{C}$ = **{2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 }**

➢ $B \cap \bar{C}$ = **{ 9 ; 10 ; 11 ; 12 }**

2- Calculer les probabilités des événements de la question 1.

$\boldsymbol{p(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}}$

$\boldsymbol{p(B \cup C) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}}$

$\boldsymbol{p(A \cup \overline{C}) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}}$

$\boldsymbol{\mathrm{p}(B \cap \overline{C}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$

Exercice 20.
La direction d'un établissement scolaire fait le point sur les élèves inscrits en demi-pension :

- L'établissement compte 850 élèves
- Il y a 213 élèves inscrits au régime « externe »
- Les filles représentent 52 % des élèves de cet établissement scolaire
- 75% des garçons de cet établissement scolaire sont au régime « demi-pensionnaire »

1- Compléter le tableau ci-dessous :

	Garçons	Filles	Total
Externe	**102**	**111**	**213**
Demi-pensionnaire	**306**	**331**	**637**
Total	**408**	**442**	**850**

2- On considère les événements :

- G : « L'élève est un garçon »
- E : « L'élève est inscrit au régime « externe » »

Déterminer la probabilité des événements : (donner les résultats sous forme de fractions)

- $\bar{G} \cap E$

$\boldsymbol{p(\overline{G} \cap E) = \frac{111}{850}}$

- $G \cup \bar{E}$

$\boldsymbol{p(G \cup \overline{E}) = p(G) + p(\overline{E}) - p(G \cap \overline{E})}$

$\boldsymbol{p(G \cup \overline{E}) = \frac{408}{850} + \frac{637}{850} - \frac{306}{850} = \frac{739}{850}}$

Exercice 21.

Un événement sportif regroupe des élèves de seconde pratiquant le foot et le hand.
On choisit au hasard un élève de parmi les élèves de seconde et on note :
F : « L'élève choisi pratique le foot » et H : « L'élève choisi pratique le hand ».

On donne les probabilités suivantes : $p(F) = 0{,}28 \quad p\,(H) = 0{,}22 \; et \; p\,(\overline{F \cup H}) = 0{,}6$.

On sait que 30 élèves de seconde pratiquent le foot et le hand. Déterminer le nombre d'élèves de seconde de cet établissement.

$$\boldsymbol{p\,(\overline{F \cup H}) = 0,6 \quad donc \quad p\,(F \cup H) = 1 - 0,6 = 0,4 \quad or \quad p(F \cup H) = p(F) + p(H) - p(F \cap H) \quad donc}$$

$$\boldsymbol{0,4 = 0,28 + 0,22 - p(F \cap H) \quad donc \quad p(F \cap H) = 0,5 - 0,4 = 0,1 = \frac{1}{10}}$$

Or on sait que 30 élèves de seconde pratiquent le foot et le hand donc il y a 300 élèves en seconde. $(\boldsymbol{\frac{1}{10} = \frac{30}{300}})$